На правах рукописи

УДК 519.853

Андрианова Анастасия Александровна

АЛГОРИТМЫ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В МЕТОДЕ ЦЕНТРОВ

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2004

Работа выполнена на кафедре экономической кибернетики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования <Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова – Ленина>.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Заботин Ярослав Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ижуткин Виктор Сергеевич

доктор технических наук, профессор Галиев Шамиль Ибрагимович

Ведущая организация: Вычислительный центр РАН, г.Москва

Защита диссертации состоится "___"___________ 2004 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета К-212.081.07 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико- математических наук при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская,18, корпус 2 , ауд. 217).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "___"___________ 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доцент Агачев Ю.Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При применении большинства существующих на данный момент методов нелинейного программирования, решающих задачу вида

$$\min\{f(x), x \in D\}, \tag{1}$$

где $D = \{x : x \in R_n, g(x) \leq 0\}$, $g(x) = \max\{f_i(x), i = 1..m\}$, специалисты сталкиваются с проблемой обеспечения остановки вычислительного процесса в точке, которая является приближенным решением задачи, удовлетворяющим заданному уровню точности. Конечно, большинство методов нелинейного программирования имеют критерий оптимальности, позволяющий определить, что полученная итерационная точка является решением задачи (1). Однако условия такого критерия выполняются только в искомой точке оптимума, которую можно достичь в общем случае только в пределе. Поэтому для эффективного использования методов оптимизации на практике требуется иметь не только критерии оптимальности, но и легко проверяемые условия, выполнение которых гарантирует получение приближенного решения задачи (1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Если таких условий нет, то приходится останавливать вычислительный процесс на основании эвристических соображений, что может привести к точке, далекой от оптимального решения задачи (1). Поэтому разработка алгоритмов в рамках того или иного метода нелинейного программирования, имеющих практически реализуемый критерий получения ε- решения задачи (1), является актуальной проблемой с точки зрения практического применения методов.

Данная диссертационная работа посвящена разработке алгоритмов в методе центров, получающих ε-решение задачи (1) за конечное число итераций.

Большой вклад в исследование вопросов построения алгоритмов и получения условий достижения точного или ε-решения задачи (1) в методе центров и в методе штрафных функций в разное время внесли такие отечественные ученые, как Гольштейн Е.Г.,Евтушенко Ю.Г., Еремин И.И., Жадан В.Г., Заботин Я.И., Ижуткин В.С., Каплан А.А., Князев Е.А., Коткин Г.Г., Сухарев А.Г., Федоров В.В. и другие. В данной работе в качестве вспомогательной функции в методе центров строится функция максимума. Методы минимизации таких функций разрабатывались Демьяновым В.Ф., Заботиным Я.И., Кораблевым А.И., Крейниным М.И., Фазыловым В.Р. Методами последовательной безусловной минимизации, включая метод центров, занимались такие зарубежные ученые, как Бертсекас Д., Гроссман К., Мак-Кормик Г., Мангасариан О.Л., Морисон Д., Фиакко А., Хьюард П. и другие.

Цель работы. Целью работы является разработка алгоритмов в параметризованных вариантах метода внутренних и внешних центров, гарантирующих получение ε-решения задачи (1) за конечное число итераций. Основным инструментом при построении алгоритмов является аппроксимация допустимого множества решений.

Методы исследования. При формулировке и доказательстве результатов используется теория выпуклого анализа и математического программирования. Достоверность результатов подтверждается приведенными доказательствами всех лемм и теорем, сформулированных в работе.

Научная новизна. Для параметризованных вариантов методов внутренних и внешних центров, использующих в качестве вспомогательной функции функцию максимума, разработаны и обоснованы новые алгоритмы. Основным инструментом в этих алгоритмах является аппроксимация множества допустимых решений, использование которой позволило не только гарантировать получение $\varepsilon-$решения задачи (1) за конечное число итераций, проделанных по разработанным алгоритмам, но и получить практически реализуемые правила задания управляющих параметров, применение которых дало возможность получения $\varepsilon-$решения задачи (1) не более чем за заданное число процессов минимизации вспомогательной функции метода центров.

Таким образом, на защиту выносятся следующие, полученные автором результаты:

1. Необходимые и достаточные условия задания управляющих параметров для получения ε-решения задачи (1) при условии нахождения точного минимума вспомогательной функции, а также при минимизации вспомогательной функции до выполнения заданной точности $\bar{\varepsilon} > 0$.

2. Практически реализуемые правила фиксации параметров для получения ε-решения задачи (1) за один процесс минимизации вспомогательной функции метода центров, проводимый как до получения абсолютного минимума, так и до достижения заданного уровня точности $\bar{\varepsilon} > 0$.

3. Принципиальные алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров, обеспечивающие получение ε-решения задачи (1) за конечное число итераций.

4. Реализуемые алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров, гарантирующие получение ε- решения задачи (1) за конечное число итераций при условии минимизации вспомогательной функции до достижения точности $\overline{\varepsilon} > 0$.

5. Алгоритм в методе внутренних центров, который осуществляет изменение параметров вспомогательной функции после каждой итерации ее минимизации по алгоритму типа наискорейшего спуска и гарантирует получение ε-решения задачи (1) за конечное число итераций.

6. Алгоритмы в методах внутренних и внешних центров, которые гарантируют получение ε-решения задачи (1) не более чем за $N > 0$ процессов минимизации вспомогательной функции.

Теоретическая и практическая значимость. Алгоритмы, предложенные и обоснованные в диссертации, обладают важным свойством, которое заключается в гарантии получения приближенного решения с заданной точностью за конечное число процессов минимизации вспомогательной функции метода центров и использовании для прекращения вычислительного процесса практически реализуемых и легко проверяемых критериев остановки. На практике при применении эвристических методов остановки вычислений такие гарантии, как правило, отсутствуют. Это свойство алгоритмов позволяет эффективно применять их для решения практических задач.

Основные подходы к построению и реализации алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества в методе центров, используемые в диссертации, могут быть использованы для построения алгоритмов в рамках других методов последовательной безусловной минимизации и при применении других видов вспомогательной функции в алгоритмах в методе центров.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на: семинарах Воронежской весенней математической школы <Понтрягинские чтения XIII> (3-9 мая 2002 г.), XIII Международной конференции <Проблемы теоретической кибернетики> (Казань, 27-31 мая 2002 г.), Российской конференции <Дискретный анализ и исследование операций> (Новосибирск, 24-28 июня 2002 г.), XIII Всероссийской конференции <Математическое программирование и приложения> (Екатеринбург, 24-28 февраля 2003 г.), Всероссийской конференции <Проблемы оптимизации и экономические приложения> (Омск, 1-5 июля 2003 г.), Всероссийской конференции <Алгоритмический анализ неустойчивых задач>(Екатеринбург, 2-6 февраля 2004 г.), ежегодных научных конференциях КГУ в 2001-2004 гг.

Публикации. Основные результаты изложены в 10 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Библиография включает 89 наименований. Общий объем диссертации составляет 132 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность задачи построения алгоритмов в методе центров с аппроксимацией множества допустимых решений, приведен обзор основных существующих на данный момент подходов, применяемых в методе центров для получения ε-решения задачи (1), описана структура диссертации и кратко изложено содержание работы.

В первой главе диссертации <Принципы построения алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества в методе центров> получены необходимые и достаточные условия получения ε-решения задачи (1) за один процесс минимизации вспомогательной функции метода центров, на основе которых построены принципиальные алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров, которые гарантируют получение ε-решения задачи (1) за конечное число итераций алгоритмов.

В § 1.1 приводится постановка задачи нелинейного программирования, которая решается с помощью предложенных в диссертации алгоритмов, перечисляются условия, которые налагаются на исходную задачу при построении алгоритмов, конкретизируется значение термина <аппроксимация>, применяемое в диссертационной работе.

Пусть $H = \{1, 2..m\}$, функции $f(x), f_i(x), i \in H$ определены в n-мерном евклидовом пространстве R_n, $g(x) = \max\{f_i(x), i \in H\}$, $D = \{x : x \in R_n, g(x) \leq 0\}$, $D' = \{x : x \in R_n, g(x) < 0\}$, $f^* = \min\{f(x), x \in D\}$, $Y = Argmin\{f(x), x \in R_n\}$.

Условие А. Задача (1) удовлетворяет условию А, если она имеет решение, функции $f(x), f_i(x), i \in H$ непрерывны в R_n и $D' \neq \emptyset$.

Условие B. Задача (1) удовлетворяет условию B, если она удовлетворяет условию A и $\overline{D'} = D$.

Условие C. Задача (1) удовлетворяет условию C, если она удовлетворяет условию B, функция $f(x)$ является выпуклой на R_n и функции $f_i(x), i \in H$ являются сильно выпуклыми на R_n с постоянными сильной выпуклости μ_i.

Условие D. Задача (1) удовлетворяет условию D, если она удовлетворяет условию B, функция $f(x)$ является выпуклой на R_n и функции $f_i(x), i \in H$ являются равномерно выпуклыми на R_n с неубывающими модулями выпуклости $\phi_i(u)(0 \leq u < \infty)$.

Обозначим через M множество функций, определенных в R_n, каждый локальный минимум которых является абсолютным, $X^*_\sigma = \{x : x \in D, f(x) \leq f^* + \sigma\}$ для $\sigma > 0$ - множество σ-решений задачи (1).

По заданной точности $\varepsilon > 0$ требуется найти точку из множества X^*_ε.

Для фиксированных значений t, γ, ρ положим $F(x, t, \gamma, \rho) = \max\{f(x) - t, \rho g(x) - \gamma\}$, $Z(t, \gamma, \rho) = Agrmin\{F(x, t, \gamma, \rho), x \in R_n\}$. Функцию вида $F(x, t, \gamma, \rho)$ будем называть вспомогательной функцией для задачи (1). Будем полагать, что $Z(t, \gamma, \rho) \neq \emptyset$ при любых значениях $\rho > 0, t, \gamma$.

Под термином <аппроксимация> допустимого множества понимается построение множества вида $D(\rho, \gamma) = \{x : x \in R_n, \rho g(x) - \gamma \leq 0\}$, где $\rho > 0$, γ - константы. Обозначим $D'(\rho, \gamma) = \{x : x \in R_n, \rho g(x) - \gamma < 0\}$.

В § 1.2 доказываются новые свойства вспомогательной функции вида $F(x, t, \gamma, \rho)$ и множества $Z(t, \gamma, \rho)$.

В § 1.3 получены и доказаны необходимые и достаточные условия получения ε-решения задачи (1) за один процесс минимизации функции вида $F(x, t, \gamma, \rho)$.

Достаточным условием получения ε-решения задачи (1) является

Теорема 1. Пусть задача (1) удовлетворяет условию A, для константы $\varepsilon > 0$ множество X^*_ε является ограниченным, параметры $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы таким образом, что

$$\rho \min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} - \varepsilon \leq f^* + \gamma - t \leq 0. \qquad (2)$$

Тогда $Z(t, \gamma, \rho) \subset X^*_\varepsilon$.

Если

$$f, g \in M, Y \cap D = \emptyset, \min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}, \quad (3)$$

то выполнение для заданных значений параметров $\rho > 0, t, \gamma$ двойного неравенства (2) является также и необходимым условием того, чтобы $Z(t, \gamma, \rho) \subset X_\varepsilon^*$. Получение точек из множества X_ε^* возможно и тогда, когда некоторые из условий (3) не выполняются. Если задача (1) удовлетворяет условию A, множество X_ε^* является ограниченным, то среди точек множества $Z(t, \gamma, \rho)$ существуют точки множества X_ε^* в каждом из следующих случаев:

1. $f \in M$, $Y \cap D \neq \emptyset$ и параметры $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что $\rho \min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon \leq f^* + \gamma - t$.

2. $g \in M$, $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} = \min\{g(x), x \in R_n\}$ и параметры $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что $f^* + \gamma - t \leq 0$.

3. $f, g \in M$, $Y \cap D \neq \emptyset$, $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} = \min\{g(x), x \in R_n\}$ и параметры $\rho > 0, t, \gamma$ фиксированы произвольным образом.

Двойное неравенство (2) имеет теоретическое значение. При построении алгоритмов используются следующие практически реализуемые условия, эквивалентные выполнению неравенства (2).

Теорема 2. Пусть задача (1) удовлетворяет условию A, $f \in M$, для $\varepsilon > 0$ множество X_ε^* ограничено, параметры ρ, t, γ функции $F(x, t, -\gamma, \rho)$ при некотором $\eta > 0$ зафиксированы так, что $\rho > 0$, $\rho \min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon \leq \eta - \gamma$, $t \leq f^* - \eta$, и произвольно выбрана точка $z \in Z(t, -\gamma, \rho)$. Тогда, для того чтобы $z \in X_\varepsilon^*$, необходимо и достаточно, чтобы $z \in D$.

Теорема 3. Пусть задача (1) удовлетворяет условию A, $g \in M$ и параметры функции $F(x, t, \gamma, \rho)$ зафиксированы так, что $t \geq f^*$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$. Тогда для того чтобы выбранные значения параметров удовлетворяли неравенству $t \leq f^* + \gamma$, необходимо и достаточно, чтобы $F(z, t, \gamma, \rho) \geq -\gamma$, где $z \in Z(t, \gamma, \rho)$.

В частности, если $t = f(y)$, где $y \in D$, $\gamma \leq \varepsilon$, тогда необходимым и достаточным условием того, что $y \in X_\varepsilon^*$, является выполнение неравенства $F(z, f(y), \gamma, \rho) \geq -\gamma$ для $z \in Z(f(y), \gamma, \rho)$.

Если в дополнение к условиям теоремы 3 $f \in M$ и $Y \cap D' = \emptyset$, то для выполнения неравенства $t \leq f^* + \gamma$ необходимо и достаточно, чтобы произвольно фиксированная точка $z \in Z(t, \gamma, \rho)$ удовлетворяла условию $z \notin D'$.

На основе доказанных достаточных условий получения $\varepsilon-$решения задачи (1) в § 1.4 и 1.5 построены принципиальные алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров соответственно.

В алгоритмах в методе внутренних центров в качестве аппроксимации допустимого множества используются множества $D(\rho, \gamma)$ при $\rho > 0$, $\gamma > 0$. Критерием остановки в алгоритмах в методе внутренних центров является получение итерационной точки, которая не принадлежит множеству D'. В этом случае гарантируется, что предыдущая итерационная точка является $\varepsilon-$решением задачи (1).

Алгоритм 1 (в методе внутренних центров). Фиксируются точка $x_0 \in D$, точность $\varepsilon > 0$, число $\delta \in (0; \varepsilon]$. Если найдена точка $x_k (k \geq 0)$, переход к точке x_{k+1} осуществляется следующим образом.

1. Выбираются числа $\gamma_k \in [\delta; \varepsilon]$, $\rho_k > 0$.

2. Находится точка $x_{k+1} \in Z(f(x_k), \gamma_k, \rho_k)$.

3. Если $F(x_{k+1}, f(x_k), \gamma_k, \rho_k) \geq -\gamma_k$, то $x_k \in X^*_\varepsilon$. Процесс решения завершен.

4. Осуществляется переход к п.1 при k, замененном на $k + 1$.

Доказано, что если задача (1) удовлетворяет условию А, $g \in M$ и последовательность $\{x_k\}$ вырабатывается по алгоритму 1, найдется такой номер $N \geq 0$, что для точки x_{N+1} будут выполнены условия пункта 3 алгоритма и $x_N \in X^*_\varepsilon$.

Если для задачи (1) известно, что $f \in M$ и $Y \cap D' = \emptyset$, то пункт 3 алгоритма 1 может принять следующий вид:

3'. Если $x_{k+1} \notin D'$, то $x_k \in X^*_\varepsilon$. Процесс решения завершен.

При построении алгоритмов в методе внешних центров в качестве аппроксимации допустимого множества используются множества $D(\rho, \gamma)$ при $\rho > 0$, $\gamma < 0$. Остановка вычислительного процесса производится при получении итерационной точки, которая принадлежит множеству D. Именно эта точка и является $\varepsilon-$решением задачи (1).

Алгоритм 2 (в методе внешних центров). Фиксируются точка $x_0 \notin D$, для которой $f(x_0) \leq f^*$, точность $\varepsilon > 0$, число $\delta \in (0; \varepsilon]$. Если найдена точка $x_k (k \geq 0)$, переход к точке x_{k+1} осуществляется по следующей схеме.

1. Выбираются $\rho_k > 0$, $\gamma_k \in [\delta; \varepsilon - \rho_k \min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}]$.

2. Находится точка $x_{k+1} \in Z(f(x_k), -\gamma_k, \rho_k)$.

3. Если $x_{k+1} \in D$, то $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. Процесс решения завершен.

4. Осуществляется переход к п.1 при k, замененном на $k+1$.

Доказано, что если задача (1) удовлетворяет условию А, $f, g \in M$, для $\varepsilon > 0$ множество X_ε^* ограничено и последовательность $\{x_k\}$ вырабатывается по алгоритму 2, найдется такой номер $N \geq 0$, что для точки x_{N+1} выполнятся условия пункта 3 алгоритма и $x_{N+1} \in X_\varepsilon^*$.

Алгоритмы в методах внутренних и внешних центров, аналогичные алгоритмам 1 и 2, построены и для следующих правил изменения параметра $t_k (k \geq 0)$ вспомогательной функции.

1. $t_{k+1} = t_k + F(x_{k+1}, t_k, \gamma_k, \rho_k)$.

2. $t_{k+1} = \tau f(x_{k+1}) + (1-\tau)t_k$, где $\tau \in (0;1)$.

В § 1.6 конкретизируется реализация некоторых этапов алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества в методе внешних центров. К их числу относится процедура нахождения точки начального приближения $x_0 \notin D$, для которой $f(x_0) \leq f^*$, и определение допустимого интервала задания параметра $\gamma_k (k \geq 0)$ в пункте 1 алгоритма 2 и других алгоритмах в методе внешних центров с аппроксимацией допустимого множества.

Во второй главе диссертации $<$Использование неполной минимизации вспомогательной функции при построении алгоритмов в методе центров с аппроксимацией допустимого множества$>$ построены реализуемые алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров.

В § 2.1 доказаны достаточные условия получения ε- решения задачи (1) за один процесс минимизации вспомогательной функции, проводимый до выполнения заданного заранее уровня точности $\overline{\varepsilon} > 0$, а также установлена связь между процессом поиска точного решения и процессом поиска $\overline{\varepsilon}-$решения задачи минимизации вспомогательной функции.

Для фиксированных значений $\rho > 0, t, \gamma$ обозначим $F^*(t,\gamma,\rho) = \min\{F(x,t,\gamma,\rho), x \in R_n\}$, $Z(t,\gamma,\rho,\overline{\varepsilon}) = \{x : x \in R_n, F(x,t,\gamma,\rho) \leq F^*(t,\gamma,\rho) + \overline{\varepsilon}\}$, $\overline{Z}(t,\gamma,\rho,\overline{\varepsilon}) = \{x : x \in R_n, F(x,t,\gamma,\rho) \leq F^*(t,\gamma,\rho) + \overline{\varepsilon}, |f(x) - t - \rho g(x) + \gamma| \leq \overline{\varepsilon}\}$.

Если среди точек множества $Z(t,\gamma,\rho)$ нет точек абсолютного минимума функций $f(x)$ и $g(x)$, то $\overline{Z}(t,\gamma,\rho,\overline{\varepsilon}) \neq \emptyset$, причем $Z(t,\gamma,\rho) \subset \overline{Z}(t,\gamma,\rho,\overline{\varepsilon})$ для $\overline{\varepsilon} > 0$.

При фиксированных значениях $\rho > 0, \gamma$ поставим вспомогательную задачу

$$\min\{f(x), x \in D(\rho,\gamma)\}. \tag{4}$$

Обозначим $f^*(\rho,\gamma) = \min\{f(x), x \in D(\rho,\gamma)\}$.

Теорема 4. Пусть задача (1) удовлетворяет условию A, $f, g \in M$, $Y \cap D = \emptyset$, $\varepsilon > 0$, множество X^*_ε является ограниченным, $\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$, параметры $0 < \overline{\varepsilon} < \varepsilon$, $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что $D(1, -\overline{\varepsilon}) \neq \emptyset$ и имеет место двойное неравенство

$$t - f^* - \varepsilon + \overline{\varepsilon} + \rho \min\{g(x), x \in X^*_{\varepsilon - \overline{\varepsilon}}\} \leq \gamma \leq t - f^*(\rho, -\overline{\varepsilon}) - \overline{\varepsilon}. \qquad (5)$$

Тогда $Z(t,\gamma,\rho,\overline{\varepsilon}) \subset X^*_\varepsilon$.

Если задача (1) удовлетворяет условию C, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$ на множестве D, $\mu = \min\{\mu_i, i \in H\}$ и параметры зафиксированы так, что $\rho > 0$, $\varepsilon > 2\overline{\varepsilon} + L\sqrt{\frac{\overline{\varepsilon}}{\mu}}$, то существуют значения параметров t, γ, для которых будет выполнено неравенство (5).

Связь между правилами фиксации параметров при поиске точного абсолютного минимума и при поиске $\overline{\varepsilon}-$решения задачи минимизации вспомогательной функции устанавливается следующей теоремой.

Теорема 5. Пусть задача (1) удовлетворяет условию A, $f, g \in M$, заданы $x_0 \in R_n$, $\rho_0 > 0, \rho_1 > 0, \gamma_0, \gamma_1$, $\overline{\varepsilon} > 0$. Пусть $x_1 \in \overline{Z}(f(x_0), \gamma_0, \rho_0, \overline{\varepsilon})$ и $z_1 \in Z(f(x_0), \gamma_0, \rho_0)$. Если $z_1 \notin Y$ и $g(z_1) \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$, то существуют числа $b_1, b_2 \in [0; \overline{\varepsilon}]$ такие, что $Z(f(x_1), \gamma_1, \rho_1) = Z(f(z_1), \gamma_1 + b_1 - b_2, \rho_1)$, $\overline{Z}(f(x_1), \gamma_1, \rho_1) = \overline{Z}(f(z_1), \gamma_1 + b_1 - b_2, \rho_1)$ и справедливо равенство $f(x_1) = f(z_1) - b_1 + b_2$.

Результаты этой теоремы позволяют интерпретировать процесс решения задачи (1), проводимый с минимизацией вспомогательной функции до выполнения точности $\overline{\varepsilon} > 0$, как процесс решения вспомогательной задачи вида (4) с помощью алгоритма с аппроксимацией допустимого множества в методе центров с получением точного абсолютного минимума вспомогательной функции (например, с помощью алгоритмов 1 или 2).

В § 2.2 на основании утверждений теорем 4 и 5, построены алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества и неполной минимизацией вспомогательной функции в методах внутренних и внешних центров, в пункте 2 которых находится точка $x_{k+1} \in \overline{Z}(f(x_k), \gamma_k, \rho_k, \overline{\varepsilon})$. Эти алгоритмы являются реализуемыми вариантами алгоритмов 1 и 2 соответственно.

Пусть задача (1) удовлетворяет условию C, $\varepsilon > 0$, множество X^*_ε является ограниченным, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L на множестве D, $Y \cap D(1,\varepsilon) = \emptyset$, $\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$, $\mu = \min\{\mu_i, i \in H\}$, для зафиксированного $\overline{\varepsilon} > 0$ имеет место $D'(1, -\overline{\varepsilon}) \neq \emptyset$ и $\overline{D'(1, -\overline{\varepsilon})} = D(1, -\overline{\varepsilon})$. Тогда

1. если точка $x_0 \in D$ удовлетворяет условию $f(x) - f(x_0) > g(x) - \delta$, где $0 < \delta < \varepsilon$, для любых $x \in \{x : x \in R_n, g(x) = \min\{g(x), x \in R_n\}\}$ и последовательность $\{x_k\}$ построена по алгоритму, который является реализацией алгоритма 1, то существует номер $N \geq 0$, для которого $x_{N+1} \notin D'$, и $x_N \in X^*_\varepsilon$.

2. если последовательность $\{x_k\}$ построена по алгоритму, который является реализацией алгоритма 2, то существует такой номер $N \geq 0$, что $x_{N+1} \in D$, причем $x_{N+1} \in X^*_\varepsilon$.

В § 2.3 разработан алгоритм с аппроксимацией допустимого множества в методе внутренних центров, построенный на идеях методов минимизации функции максимума типа наискорейшего спуска. На каждой итерации алгоритма строится вспомогательная функция, находится направление ее убывания в текущей итерационной точке, производится шаг по этому направлению. На основании свойств полученной таким образом новой итерационной точки осуществляется изменение значений параметров вспомогательной функции, т.е. для каждой вспомогательной функции осуществляется только одна итерация ее минимизации.

Пусть задача (1) удовлетворяет условию B, функции $f(x), f_i(x), i \in H$ являются непрерывно-дифференцируемыми и выпуклыми в R_n.

Алгоритм 3. Фиксируется точка $x_0 \in D'$, числа $\chi \in (0;1)$, $\theta_i > 0$, $i \in H \cup \{0\}$, последовательности $\{a_r\}$, $\{b_r\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$a_r > 0, a_{r+1} < a_r \quad r \geq 0; \quad a_r \to 0, r \to \infty, \sum_{r=0}^{\infty} a_r = \infty$$

$$b_r \geq 1, b_{r+1} > b_r \quad r \geq 0; \quad b_r \to \infty, r \to \infty$$

Полагается $k = 0$, $z_0 = y_0 = x_0$, $r_0 = 0$, $q_0 = 0$, $p = 0$.

1. Строится функция $F(x, f(x_k), \rho_k) = \max\{f(x) - f(x_k), \rho_k g(x) - \varepsilon\}$, где $\rho_k = b_{q_k}$.

2. Если $p = 1$, то принимается $(s_k, \sigma_k) = (s_{k-1}, \sigma_{k-1})$. Осуществляется переход к п.7.

3. Строится множество $H(z_k, \delta_k) = \{i : i \in H, F(z_k, f(x_k), \rho_k) - \delta_k \leq \rho_k f_i(z_k) - \varepsilon\}$, где $\delta_k = \rho_k a_{r_k}$.

4. Решается задача

$$\sigma - max \tag{6}$$

$$(f'(z_k), s) + \theta_0\sigma \le 0, \tag{7}$$

$$(f'(z_k), s) + \theta_i\sigma \le 0 \quad i \in H(z_k, \delta_k) \tag{8}$$

$$s \in S, \tag{9}$$

где S -замкнутое ограниченное множество в пространстве R_n, содержащее нуль пространства в качестве внутренней точки. Задача (6)-(9) является задачей выбора направления убывания для функции $F(x, f(x_k), \rho_k)$ в точке z_k. Пусть (s_k, σ_k) - оптимальное решение задачи (6)-(9).

5. Если $\sigma_k = 0$ и $H(z_k, \delta_k) = \emptyset$, то $x_k \in X^*_\varepsilon$. Процесс решения завершен.

6. Если $\sigma_k = 0$, то $x_{k+1} = x_k$, $y_{k+1} = y_k$, $z_{k+1} = z_k$, $q_{k+1} = q_k$, $r_{k+1} = r_k + 1$, осуществляется переход к п.1 при k, замененном на $k + 1$.

7. Вычисляется $\eta_k \in [\chi\lambda^*_k; \lambda^*_k]$, где $\lambda^*_k = argmin\{F(z_k+\lambda s_k, f(x_k), \rho_k),$ $\lambda > 0\}$ - полный шаг из точки z_k по направлению убывания s_k для функции $F(x, f(x_k), \rho_k)$, и принимается $\lambda_k = \chi\eta_k$.

8. Определяется точка $y_{k+1} = z_k + \lambda_k s_k$.

9. Если $y_{k+1} \in D'$ и $f(y_{k+1}) - f(x_k) \le -\varepsilon$, то $x_{k+1} = y_{k+1}$, $z_{k+1} = y_{k+1}$, $q_{k+1} = q_k$, $r_{k+1} = r_k + 1$, $p = 0$.

10. Если $y_{k+1} \notin D'$, то $x_{k+1} = x_k$, $z_{k+1} = z_k$, $q_{k+1} = q_k + 1$, $r_{k+1} = r_k$, $p = 1$.

11. Если $y_{k+1} \in D'$ и $f(y_{k+1}) - f(x_k) > -\varepsilon$, то $x_{k+1} = x_k$, $z_{k+1} = y_{k+1}$, $q_{k+1} = q_k + 1$, $r_{k+1} = r_k + 1$, $p = 0$.

12. Осуществляется переход к п.1 при k, замененном на $k + 1$.

Если начальная точка $x_0 \in D'$ была выбрана так, что множество $\{x : x \in D, f(x) \le f(x_0)\}$ является ограниченным, и не существует номера, для которого выполнены условия пункта 5 алгоритма, то справедливы утверждения:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = f^*$.

2.Существует номер $N \ge 0$ такой, что для всех номеров $k \ge N$ не выполняются условия пункта 9 алгоритма, причем $x_N \in X^*_\varepsilon$.

В третьей главе диссертации $<$Управление процессом минимизации посредством мультипликативной параметризации в методе центров$>$ основное внимание уделено роли параметра ρ в управлении процессом минимизации.

В § 3.1 на основании теоремы 1 получены теоретические правила задания параметров для получения ε-решения задачи (1), удовлетворяющей условию B, за один процесс минимизации вспомогательной функции.

В § 3.2 на основе результатов § 3.1 получены практически реализуемые правила фиксации параметров для получения ε-решения задачи (1) за один процесс минимизации вспомогательной функции, построенной в методе внутренних центров.

Пусть для $\varepsilon > 0$ множество X^*_ε является ограниченным, функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве X^*_ε условию Липшица с константой $L > 0$, $\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$ и пусть известно число $\underline{f}$, для которого выполняется условие $\underline{f} \leq f^*$. Тогда $Z(t, \gamma, \rho) \subset X^*_\varepsilon$ в каждом из двух случаев:

1. Задача (1) удовлетворяет условию C, $\mu = \min\{\mu_i, i \in H\}$, параметры $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что

$$\gamma \geq \delta > 0, t \geq f^* + \gamma, \rho \geq -\frac{L^2(\varepsilon + \delta + \underline{f} - t)}{\mu\varepsilon^2}. \tag{10}$$

2. Задача (1) удовлетворяет условию D, $\phi(u) = \min\{\phi_i(u), i \in H\}$, параметры $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что

$$\gamma \geq \delta > 0, t \geq f^* + \gamma, \rho \geq -\frac{\varepsilon + \delta + \underline{f} - t}{\phi(\frac{\varepsilon}{L})}. \tag{11}$$

Поскольку оценки параметра ρ, указанные в (10) и (11), оказываются обычно существенно завышенными, построены алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методе внутренних центров, обладающие следующим свойством. В этих алгоритмах условия (10) или (11) выполняются только на итерации с номером $N > 0$, гарантируя, что ε-решение задачи (1) будет получено не более чем за N итераций. Однако алгоритмы имеют дополнительный критерий остановки, условия которого могут быть выполнены на итерации с номером, меньшим N. Этим критерием остановки является получение точки, не принадлежащей допустимому множеству. Тогда гарантируется, что предыдущая итерационная точка есть ε-решение задачи (1).

Сформулируем алгоритм в методе внутренних центров для решения задач, удовлетворяющих условию C.

Алгоритм 4. Фиксируются точка $x_0 \in D$, точность $\varepsilon > 0$, число $\delta \in (0; \varepsilon]$, $N > 0$ - число итераций, за которое должно быть получено ε-решение задачи (1), $\rho_{-1} = 0$. Задается возрастающая функция $\varphi(u)$, для которой $\varphi(1) > 0, \varphi(N) \geq 1$. Полагается $k = 0$.

1. Вычисляется $C_k = -\frac{L^2(\varepsilon+\delta+\underline{f}-f(x_k))}{\mu\varepsilon^2}$, принимается $\rho_k = \max\{\varphi(k+1)C_k, \rho_{k-1}\}$.

2. Фиксируется число $\gamma_k \in [\delta; \varepsilon]$.

3. Выбирается точка $x_{k+1} \in Z(f(x_k), \gamma_k, \rho_k)$.

4. Если $k = N - 1$ и $x_{k+1} \in D'$, то $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. Процесс решения завершен.

5. Если $x_{k+1} \notin D'$, то $x_k \in X^*_\varepsilon$. Процесс решения завершен.

6. Осуществляется переход к п.1 при k, замененном на $k + 1$.

Доказано, что если задача (1) удовлетворяет условию C, для $\varepsilon > 0$ множество X^*_ε является ограниченным, функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве X^*_ε условию Липшица с константой $L > 0$, $\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$, тогда условия пунктов 4 или 5 алгоритма будут выполнены при некотором номере $k \leq N - 1$ и будет получено ε-решение задачи (1).

В § 3.3 получены практически реализуемые правила, позволяющие получить ε-решение задачи (1) за один процесс минимизации вспомогательной функции, построенной в методе внешних центров.

Пусть для $\varepsilon > 0$ множество X^*_ε является ограниченным, функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве X^*_ε условию Липшица с константой $L > 0$, $\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$ и пусть известно число $\overline{f}$, для которого выполняется условие $\overline{f} \geq f^*$. Тогда $Z(t, \gamma, \rho) \subset X^*_\varepsilon$ в каждом из следующих случаев:

1. Задача (1) удовлетворяет условию C, $\mu = \min\{\mu_i, i \in H\}$, параметры $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что

$$t \leq f^*, \quad \rho' \geq -\frac{L^2(\varepsilon - \overline{f} + t)}{\mu\varepsilon^2}, \quad \gamma = \rho'\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2} - \varepsilon, \quad \rho \geq \rho'. \qquad (12)$$

2. Задача (1) удовлетворяет условию D, $\phi(u) = \min\{\phi_i(u), i \in H\}$, параметры $\rho > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что

$$t \leq f^*, \quad \rho' \geq -\frac{\varepsilon - \overline{f} + t}{\phi(\frac{\varepsilon}{L})}, \quad \gamma = \rho'\phi(\frac{\varepsilon}{L}) - \varepsilon, \quad \rho \geq \rho'. \qquad (13)$$

Оценки параметра ρ, указанные в (12) и (13), также оказываются завышенными. Поэтому построены алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методе внешних центров для задач, удовлетворяющих условию C или D, которые позволяют получить ε-решение задачи (1) не более чем за заданное число итераций $N > 0$. Также, как и алгоритмы в методе внутренних центров, алгоритмы § 3.3 имеют дополнительный критерий остановки вычислений, условия которого могут быть выполнены на итерации с номером, меньшим N - получение допустимой итерационной точки, которая и является ε- решением задачи (1).

В § 3.4 алгоритмы в методах внутренних и внешних центров с аппроксимацией допустимого множества, получающие ε- решение задачи (1) не более чем за $N > 0$ итераций, построены из предположения минимизации вспомогательной функции до выполнения точности $\overline{\varepsilon} > 0$.

Пусть задача (1) удовлетворяет условию C, для $\varepsilon > 0$ множество X_{ε}^{*} является ограниченным, функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве D условию Липшица с константой $L > 0$, $\min\{g(x), x \in X_{\varepsilon}^{*}\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$ и известны числа $\underline{f}, \overline{f}$, для которых выполняется условие $\underline{f} \leq f^{*} \leq \overline{f}$. Тогда $Z(t, \gamma, \rho, \overline{\varepsilon}) \subset X_{\varepsilon}^{*}$ в каждом из следующих случаев:

1. Параметры $0 < \overline{\varepsilon} < \varepsilon$, $\rho \geq 1$, t, γ зафиксированы так, что $D'(\rho, -\overline{\varepsilon}) \neq \emptyset$ и выполняются неравенства

$$\gamma \geq \delta > 0, \quad t \geq f^{*} + \gamma + L\sqrt{\frac{\overline{\varepsilon}}{\mu}} + \overline{\varepsilon}, \quad \rho \geq -\frac{L^2(\varepsilon - \overline{\varepsilon} + \delta + \underline{f} - t)}{\mu(\varepsilon - \overline{\varepsilon})^2}. \tag{14}$$

2.Параметры $\overline{\varepsilon} > 0$, $\rho' \geq 1$, t, γ зафиксированы так, что $D'(1, -\overline{\varepsilon}) \neq \emptyset$, $\overline{D'(1, -\overline{\varepsilon})} = D(1, -\overline{\varepsilon})$, $\varepsilon \geq 2\overline{\varepsilon} + L\sqrt{\frac{\overline{\varepsilon}}{\mu}}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon - \overline{\varepsilon} - L\sqrt{\frac{\overline{\varepsilon}}{\mu}}$ и имеют место соотношения

$$t \leq f^{*} + L\sqrt{\frac{\overline{\varepsilon}}{\mu}}, \rho' \geq -\frac{L^2\sqrt{\mu}(\varepsilon_1 - 2\overline{\varepsilon} - \overline{f} + t) - L^3\sqrt{\overline{\varepsilon}}}{\sqrt{\mu}(\mu\varepsilon_1^2 + L^2\overline{\varepsilon})},$$

$$\gamma = -\rho'(\frac{\mu\varepsilon_1^2}{L^2} + \overline{\varepsilon}) - \varepsilon_1 + \overline{\varepsilon}, \quad \rho \geq \rho'. \tag{15}$$

Применение правил (14) и (15) позволяет построить алгоритмы в методах внутренних и внешних центров, получающие ε- решение задачи (1) не более чем за $N > 0$ итераций, аналогичные алгоритмам, построенным в § 3.2 и § 3.3, при условии, что для каждого номера $k \geq 0$ выбирается $x_{k+1} \in \overline{Z}(f(x_k), \gamma_k, \rho_k, \overline{\varepsilon})$.

Четвертая глава диссертации <Решение тестовых задач> посвящена решению задач с помощью алгоритмов, построенных в диссертации, и их сравнению с классическими алгоритмами в методах внутренних и внешних центров и их параметризованными модификациями.

При решении задач полагалось $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-7}$. Фиксация параметра γ_k на каждой итерации проводилась случайным образом из допустимого для соответствующего алгоритма интервала. Минимизация вспомогательной функции проводилась с точностью $\overline{\varepsilon} = 10^{-8}$. Для остановки вычислительного процесса, проводимого по методам внутренних и внешних центров и их параметризованным вариантам, использовался эвристический критерий - вычисления прекращались, если при некотором номере $k \geq 0$ имело место неравенство $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon$.

На основании проведенных экспериментов сделаны следующие выводы.

1. При решении задач с помощью алгоритмов, предложенных в диссертации, за конечное число итераций выполняются условия критериев остановки и приближенные решения удовлетворяют заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$. Применение же известных алгоритмов в методе центров с использованием эмпирического критерия остановки привело к прерыванию вычислительного процесса в точках, в которых заданная точность не достигалась, примерно в 35 процентах случаев.

2. Алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методе внешних центров останавливают процесс в допустимой точке, в то время как при применении метода внешних центров и его параметризованной модификации приходится ограничиваться точкой, близкой к границе множества, но не принадлежащей ему.

3. Применение мультипликативного параметра ρ и скорость его изменения может привести к значительному сокращению количества итераций, которое требуется проделать до достижения решения с заданной точностью.

4. В алгоритмах, построенных в третьей главе, значение ρ_k фиксируется исходя из оценок величин константы Липшица целевой функции и постоянной сильной выпуклости функций ограничений, которые могут быть достаточно грубыми. Поэтому выполнение заданного количества N итераций не требуется. Чаще всего остановка производится по дополнительным критериям остановки на итерации с номером, меньшим N.

5. Теоретическим критерием остановки процесса вычислений алго-

ритма 3 является тот факт, что начиная с некоторого номера $K \geq 0$, ни разу не выполняются условия пункта 9 алгоритма. В связи с этим процесс останавливался тогда, когда в течение последних 50 итераций условия пункта 9 алгоритма не имели места. Хотя этот критерий все еще носит эмпирический характер, при решении всех тестовых задач было получено решение, удовлетворяющее заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$. Следует заметить, что количество малых итераций (поиск направления убывания вспомогательной функции и шаг по нему), проделанных по алгоритму 3, и время работы алгоритма для задач размерности $n \geq 5$ уменьшается по сравнению с другими алгоритмами в методе центров.

Указанные выводы подтверждают эффективность использования алгоритмов, предложенных в диссертации, для решения практических задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказаны необходимые и достаточные условия задания управляющих параметров вспомогательной функции в методе центров для получения приближенного решения задачи нелинейного программирования, удовлетворяющего заданной точности $\varepsilon > 0$, при условии как получения точного абсолютного минимума, так и получения $\overline{\varepsilon}$-решения задачи минимизации вспомогательной функции. На основе достаточных условий для задач, целевая функция которых является выпуклой, а функции-ограничения сильно выпуклыми или равномерно выпуклыми, разработаны практически реализуемые правила задания параметров, следуя которым ε-решение исходной задачи можно получить за один процесс минимизации вспомогательной функции.

2. Разработаны принципиальные алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров. Критерием остановки алгоритмов является получение итерационной точки из множества, образованного разностью допустимого множества решений и множества, являющегося его аппроксимацией. Доказано, что за конечное число итераций, проделанных по этим алгоритмам, будет получено ε-решение задачи.

3. Построены алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров с минимизацией вспомогательной функции до выполнения заданной точности $\overline{\varepsilon} > 0$, которые также за конечное число итераций получают ε-решение исходной задачи.

4. Разработан алгоритм в методе внутренних центров на основе наискорейшего спуска. После каждой итерации минимизации вспомогательной функции в нем осуществляется подстройка параметров. Применение аппроксимации допустимого множества позволяет гарантировать получение ε-решения задачи за конечное число итераций.

5. Построены алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методах внутренних и внешних центров, получающие ε-решение задачи не более, чем за заданное заранее число итераций $N > 0$.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Заботин Я.И. Алгоритмы в методе центров с аппроксимацией множества допустимых решений/Я.И.Заботин, А.А. Андрианова // Изв. вузов. Математика. - 2001. - N 12. - с.41-45.

2. Андрианова А.А. Конечные алгоритмы в методе центров с аппроксимацией допустимого множества /А.А. Андрианова// Казан. ун-т - Казань, 2002 - 31 с. (деп. в ВИНИТИ 06.05.02, N 791-B2002).

3. Заботин Я.И. Алгоритм в методе центров с использованием множества, вложенного в допустимое /Я.И.Заботин, А.А.Андрианова // Материалы Воронежской весенней математической школы <Понтрягинские чтения XIII>, 3-9 мая 2002 г.- Воронеж, 2002. - с. 58.

4. Андрианова А.А. Метод центров с аппроксимацией допустимого множества /А.А. Андрианова, Я.И. Заботин// Тез. докладов XIII Международной конференции <Проблемы теоретической кибернетики> (Казань, 27-31 мая 2002 г.) - Москва , 2002. - ч.I, с.13.

5. Заботин Я.И. Получение решения с заданной точностью методом центров /Я.И. Заботин, А.А. Андрианова// Тезисы докладов Российской конференции <Дискретный анализ и исследование операций> (Новосибирск, 24-28 июня 2002 г.). - Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2002. - с.163.

6. Андрианова А.А. Управление процессом минимизации в параметризованном методе центров /А.А.Андрианова, Я.И.Заботин// Изв. вузов. Математика. - 2002. - N 12. - с. 3-10.

7. Андрианова А.А. Минимизация с заданной точностью в параметризованном методе центров /А.А.Андрианова, Я.И.Заботин// Информационный бюллетень №10. Тезисы докладов конференции <Математическое программирование и приложения> (Екатеринбург, 24-28 февраля 2003 г.) - Екатеринбург, 2003. - с.28-29.

8. Андрианова А.А. Алгоритм с неполной минимизацией вспомогательной функции в методе центров /А.А.Андрианова, Я.И.Заботин// Материалы Всероссийской конференции <Проблемы оптимизации и экономические приложения> (Омск, 1-5 июля 2003 г.) - Изд-во Наследие. Диалог Сибирь. - Омск , 2003. - с.114.

9. Андрианова А.А. Об одном алгоритме в методе центров с аппроксимацией допустимого множества на основе наискорейшего спуска /А.А.Андрианова// Казан. ун-т - Казань, 2003 - 20 с. (деп. в ВИНИТИ 04.12.2003 N 2100-В2003).

10. Андрианова А.А. Алгоритм с неполной минимизацией вспомогательной функции в параметризованном методе центров / А.А. Андрианова, Я.И.Заботин// Тезисы докладов Всероссийской конференции <Алгоритмический анализ неустойчивых задач>, Екатеринбург, 2-6 февраля 2004 г. - Изд-во Уральского университета - Екатеринбург, 2004. - с.246-247.